Chapter 1

随机游动：马氏链的特例

1.1 一维随机游动

首先，我们假定存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，并且这个空间足够大，可以在上面定义（可数）无穷多个相互独立的两点分布随机变量 $\{B_n : n = 1, 2, \dots\}$，满足

$$\mathbb{P}(B_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(B_n = -1) = q = 1 - p.$$

（想一想：这个概率空间显然存在么？一般的 $[0, 1]$ 区间上的勒贝格测度是否满足要求？）

定义随机变量

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{m=1}^{n} B_m \quad (m = 1, 2, \dots). \tag{1.1}$$

这样的一族随机变量 $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ 一般称为$\mathbb{Z}$ 上的*随机游动*。下面这个等价定义更显示出，它是一个以 n 为离散时间的随机过程：

$$\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1, \tag{1.2a}$$

$$\mathbb{P}(X_n - X_{n-1} = \varepsilon \mid X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \begin{cases} p, & \varepsilon = 1, \\ q, & \varepsilon = -1. \end{cases} \tag{1.2b}$$

（这里 $\mathbb{P}(X_n - X_{n-1} = \varepsilon \mid X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ 的意思是 $X_n - X_{n-1}$ 这个随机变量关于 $X_0, \dots, X_{n-1}$ 这些随机变量的*条件概率*。一般来说，这样的条件概率应该是依赖 $X_0, \dots, X_{n-1}$ 的取值的。(1.2b)的右边不依赖于它们，是一个值得注意的性质。）

1.1.1 时间 n 时的分布

首先的问题：当时间为 n 时，随机变量 X_n 的分布。

显然，X_n 是取值为整数的离散随机变量。其次，X_n 的奇偶性总是和 n 的相同而且 $|X_n| \leq n$。

首先，考虑(1.1)给出的第一种定义。$B'_n = (B_n + 1)/2$ 是相互独立的 Bernoulli(p) 随机变量，因此

$$X'_n = \frac{X_n + n}{2} = \sum_{m=1}^{n} B'_m$$

是一个二项分布随机变量。对于与 n 奇偶性相同并满足 $-n \leq m \leq n$ 的整数 m，我们有

$$\mathbb{P}(X_n = m) = \mathbb{P}(X'_n = \frac{m+n}{2}) = \binom{n}{\frac{m+n}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}. \tag{1.3}$$

也可以从第二种定义(1.2)出发。为了符号简洁，我们记 $\mathbb{P}(X_n = m)$ 为 $(P^n)_m$。（这个记号的意义会在以后得到解释。）考虑从时间 $n-1$ 到时间 n 的“转移”，我们可知

$$\begin{aligned}(P^n)_m &= \mathbb{P}(X_{n-1} = m-1 \& X_n = m) + \mathbb{P}(X_{n-1} = m+1 \& X_n = m)\\ &= p\mathbb{P}(X_{n-1} = m-1) + q\mathbb{P}(X_{n-1} = m+1),\end{aligned}$$

考虑到 $n = 0$ 的初始条件 $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ 和对于所有非零整数 m，$\mathbb{P}(X_0 = m) = 0$，我们得到

$$(P^0)_m = \delta_{0,m}, \quad (P^n)_m = p(P^{n-1})_{m-1} + q(P^{n-1})_{m+1}.$$

这个递推关系完整地决定了 $(P^n)_m$ 的值。当然，想得到(1.3)这样紧凑的公式，还需要一些组合技巧。

1.1.2 通过时间的第一种计算方法：反射原理

下一个问题：固定某个整数点 a，随机游动首次通过这个位置的时间的分布。这个首次通过时间的数学表达式是

$$\zeta_a = \inf\{n \geq 1 : X_n = a\}.$$

（我们允许 $\zeta_a = \infty$，意思是，对于所有的 $n = 1, 2, \ldots$，$X_n \neq a$。）

不失一般性，我们假定 $a>0$ 并且奇偶性与 n 相同。因为第 n 步首次通过 a 等价于（1）第 $n-1$ 步走到 $a-1$，并且没碰过 a，再（2）第 n 步往右走：

$$\mathbb{P}(\zeta_a=n)=\mathbb{P}(\underbrace{X_n=a}_{\text{第 }n\text{ 步到了 }a}\&\underbrace{\zeta_a>n-1}_{\text{未提前到}})=p\mathbb{P}(\zeta_a>n-1\&X_{n-1}=a-1).$$

我们只需要计算 $\mathbb{P}(\zeta_a>n-1\&X_{n-1}=a-1)$。回顾(1.1)，我们有 $\mathbb{P}(X_{n-1}=a-1)=\binom{n-1}{(n-a)/2}p^{(n+a)/2-1}q^{(n-a)/2}$。（这里 $\binom{n-1}{(n-a)/2}$ 是所有 $B_1,\ldots,B_{n-1}$ 取值 ±1 且其和为 $a-1$ 的取值方法数目，而 $p^{(n+a)/2-1}q^{(n-a)/2}$ 是任意上述取值的概率权重（$n-1$ 个 B_i，$(n+a)/2-1$ 个取 1，另外的 $n-a$ 个为 -1。）同理，如果令 $\mathcal{N}(n,a)$ 为所有 $B_1,\ldots,B_{n-1}$ 取值 ±1，其和为 $a-1$，并且对所有 $\ell=1,\ldots,n-1$，$B_1+\cdots+B_\ell\le a-1$ 的取值方法数目，则

$$\mathbb{P}(\zeta_a>n-1\&X_{n-1}=a-1)=\mathcal{N}(n,a)p^{\frac{n+a}{2}-1}q^{\frac{n-a}{2}}.$$

直观上说，$\mathcal{N}(n,a)$ 就是在格点图上，从 $(0,0)$ 出发，达到 $(n-1,a-1)$，且一直不越过 $y=a-1$ 这道横线的所有折线数量（见图1.1）。很显然，

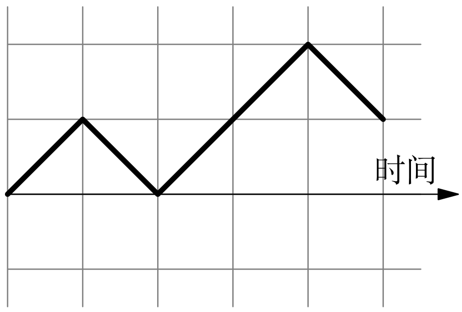

图 1.1: $B_1=1$，$B_2=-1$，$B_3=1$，⋯⋯对应的折线图。

如果我们定义 $L(n,a)$ 为从 $(0,0)$ 出发，达到 $(n-1,a-1)$，且在至少一点越过 $y=a-1$ 这道横线的折线的集合，而 $\mathcal{N}'(n,a)=|L(n,a)|$，则 $\mathcal{N}(n,a)=\binom{n-1}{(n+a)/2-1}-\mathcal{N}'(n,a)$。下面，我们介绍一个几何上看上去显然的结论：如果定义 $U(n,a)$ 为从 $(0,0)$ 出发，到达 $(n-1,a+1)$ 的折线的集合，则 $L(n,a)$ 到 $U(n,a)$ 有一个一一映射，见图1.2。这就是我们的反射原理！于是，$\mathcal{N}'(n,a)=|U(n,a)|=\binom{n-1}{(n+a)/2}$，我们得到

$$\mathcal{N}(n,a)=\binom{n-1}{\frac{n+a}{2}-1}-\binom{n-1}{\frac{n+a}{2}},$$

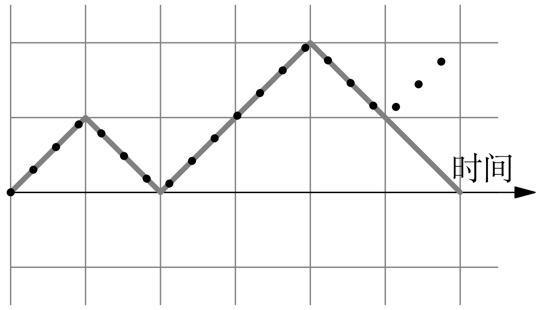

图 1.2: 反射原理示意图（$a=1$，$n=7$）。灰实线图代表一个 $L(n,a)$ 中元素，黑点线图代表一个 $U(n,a)$ 中元素。这两个元素互相对偶：他们相互重合，直到在灰实线图最后一次走到 a 位置时，两个线路分开，并且对称于高度为 a 的横线。

以及

$$\mathbb{P}(\zeta_a=n)=\left[\binom{n-1}{\frac{n+a}{2}-1}-\binom{n-1}{\frac{n+a}{2}}\right]p^{\frac{n+a}{2}}q^{\frac{n-a}{2}}. \tag{1.4}$$

对比(1.4)和(1.3)，我们发现对于 $a>0$（并且满足一些显然的条件），

$$\mathbb{P}(\zeta_a=n)=\frac{a}{n}\binom{n-1}{\frac{n+a}{2}}p^{\frac{n+a}{2}}q^{\frac{n-a}{2}}=\frac{a}{n}\mathbb{P}(X_n=a). \tag{1.5}$$

对 $a<0$ 情况，可以得到极相似的公式（练习）。

1.1.3 进一步推导

想知道：是不是随机游动几乎总是，不可避免地，走到 a 这个点？

我们把 ζ_a 视作 $B_1,B_2,\dots$ 的函数：$\zeta_a=f_a(B_1,B_2,\dots)$（这是一个无穷元函数），这里，对于整数值变量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots$），

$$f_a(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots)=\inf\{n:\sum_{\ell=1}^{n}\varepsilon_\ell\geq a\}.$$

我们假定 $\inf\emptyset=+\infty$，所以 ζ_a 有可能是 $+\infty$。

我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\zeta_{a+1}<\infty)&=\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(\zeta_a=m\&\zeta_{a+1}<\infty)\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\mathbb{P}(\zeta_a=m)\mathbb{P}(f_1(B_{m+1},B_{m+2},\dots)<\infty)}_{\zeta_a=m\text{ 只依赖于 }B_1,\dots,B_m\text{，与 }B_{m+1},B_{m+2},\dots\text{ 相互独立}}.\end{aligned}$$

其中第二个等式是因为, 如果 $\zeta_a = m$, 则 $\zeta_{a+1} = m + f_1(B_{m+1}, B_{m+2}, \dots)$ 且 $\{\zeta_a = m\}$ 这个事件和 $\{f_1(B_{m+1}, B_{m+2}, \dots) < \infty\}$ 这个事件相互独立。下面，我们利用一个显然的性质 $f_1(B_{m+1}, B_{m+2}, \dots)$ 与 $f_1(B_1, B_2, \dots) = \zeta_1$ 同分布, (这两个随机变量可以认为相差一个时间平移，所以我们下面记 $f_1(B_{m+1}, B_{m+2}, \dots)$ 为 $\zeta_1 \circ \Sigma^m$。) 得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\zeta_{a+1} < \infty) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\zeta_a = m)\mathbb{P}(\zeta_1 < \infty) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\zeta_a = m)\right) \mathbb{P}(\zeta_1 < \infty) = \mathbb{P}(\zeta_a < \infty)\mathbb{P}(\zeta_1 < \infty).\end{aligned}$$

利用数学归纳法，我们得到对所有 $a = 1, 2, \dots$,

$$\mathbb{P}(\zeta_a < \infty) = \mathbb{P}(\zeta_1 < \infty)^a.$$

同理（或者直接利用对称性），对所有 $a = -1, -2, \dots$,

$$\mathbb{P}(\zeta_a < \infty) = \mathbb{P}(\zeta_{-1} < \infty)^{-a}.$$

所以下面不失一般性，我们只考虑 $\mathbb{P}(\xi_1 < \infty)$。我们用单调收敛定理:

$$\mathbb{P}(\zeta_1 < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\zeta_1 = 2n-1) = \lim_{s \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n-1}\mathbb{P}(\zeta_1 = 2n-1) = \lim_{s \nearrow 1} \mathbb{E}[s^{\zeta_1}].$$

(这里以及以后，我们发现考虑某离散随机变量 X 的概率母函数 $\mathbb{E}[s^X]$ 是很有用的手段。只是要注意概率母函数只有 $|s| \le 1$ 时才有良好定义。) 由(1.5),

$$\mathbb{P}(\zeta_1 = 2n-1) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n} p^n q^{n-1}.$$

因为下面的组合恒等式（二项式展开验证）

$$\frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n} = (-1)^{n-1}\frac{4^n}{2}\binom{1/2}{n},$$

我们可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^{2n-1}\mathbb{P}(\zeta_1 = 2n-1) = -\frac{1}{2qs}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4pqs^2)^n = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs},$$

也即是

$$\mathbb{E}[s^{\zeta_1}] = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}, \quad \text{只要} \quad |s| < \frac{1}{\sqrt{4pq}}. \tag{1.6}$$

注意到 $1/\sqrt{4pq} \geq 1$，我们总可以取 $s \nearrow 1$ 这个左极限。取此极限后，我们得到

$$\mathbb{P}(\zeta_1 < \infty) = \lim_{s \nearrow 1} \mathbb{E}[s^{\zeta_1}] = \frac{1 - |p-q|}{2q} = \frac{p \wedge q}{q} = \begin{cases} 1, & p \geq q, \\ p/q, & p < q. \end{cases}$$

通过相似步骤，或者利用对称性，我们可以推导 $\mathbb{P}(\zeta_{-1} < \infty)$ 的公式，并且最后得到

$$\mathbb{P}(\zeta_a < \infty) = \begin{cases} 1, & (a > 0 \& p \geq q) \text{或} (a < 0 \& p \leq q), \\ \left(\frac{p}{q}\right)^a, & (a > 0 \& p < q) \text{或} (a < 0 \& p > q). \end{cases}$$

1.1.4 首次返回时间

我们没定义 ζ_0（因为它就是 0），但是可以定义类似的首次返回到 0 的时刻

$$\rho_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}.$$

因为我们有

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, \rho_0 < \infty) = p\mathbb{P}(\zeta_{-1} < \infty), \quad \mathbb{P}(X_1 = -1, \rho_0 < \infty) = q\mathbb{P}(\zeta_1 < \infty),$$

又知道第一步不是先到 1 就是先到 -1，所以

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\rho_0 < \infty) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, \rho_0 < \infty) + \mathbb{P}(X_1 = -1, \rho_0 < \infty) \\ &= \left\{ \begin{matrix} p \cdot \frac{q}{p} + q \cdot 1, & p > q, \\ p \cdot 1 + q \cdot \frac{p}{q}, & p < q, \\ p \cdot 1 + q \cdot 1, & p = 1 = \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} = 2(p \wedge q). \end{aligned} \tag{1.7}$$

于是我们得到一个有意思的结论：随机游动 $\{X_n : n \geq 0\}$ 以概率 1 回到 0，当且仅当它是对称的：$p = q = 1/2$。

更进一步，在 $\rho_0 < \infty$ 这个条件下，我们可以计算 ρ_0 的期望，也就是 $\mathbb{E}[\rho_0 \mid \rho_0 < \infty]$。我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1, \rho_0 = 2n) &= p\mathbb{P}(\zeta_{-1} = 2n - 1), \\ \mathbb{P}(X_1 = -1, \rho_0 = 2n) &= q\mathbb{P}(\zeta_1 = 2n - 1). \end{aligned}$$

所以（对于 $|s|<1$）

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[s^{\rho_0}] &= \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n}\mathbb{P}(\rho_0=2n)\\
&= s\sum_{n=1}^{\infty} s^{2n-1}\left(p\mathbb{P}(\zeta_{-1}=2n-1)+q\mathbb{P}(\zeta_1=2n-1)\right)\\
&= s\left(p\sum_{n=1}^{\infty} s^{2n-1}\mathbb{P}(\zeta_{-1}=2n-1)+q\sum_{n=1}^{\infty} s^{2n-1}\mathbb{P}(\zeta_1=2n-1)\right)\\
&= s(p\mathbb{E}[s^{\zeta_{-1}}]+q\mathbb{E}[s^{\zeta_1}]) = 1-\sqrt{1-4pqs^2}.
\end{aligned}
$$

因为对所有 $|s|<1$，

$$
\mathbb{E}[\rho_0 s^{\rho_0}] = s\frac{d}{ds}\mathbb{E}[s^{\rho_0}] = \frac{4pqs^2}{\sqrt{1-4pqs^2}},
$$

我们用单调收敛定理得到

$$
\mathbb{E}[\rho_0,\rho_0<\infty] = \mathbb{E}[\rho_0 1_{\rho_0<\infty}] = \lim_{s\nearrow 1}\mathbb{E}[\rho_0 s^{\rho_0}] = \frac{4pq}{|p-q|}.
$$

进而结合(1.7)我们可以计算如下条件概率

$$
\mathbb{E}[\rho_0 \mid \rho_0<\infty] = \frac{2p\wedge q}{|p-q|} = 1+\frac{1}{|p-q|}.
$$

直观上说，就是：当 $p=q=1/2$ 是，平均返回 0 点的时间是无穷大，随然几乎总是能够返回；当 $p\neq q$ 时，有可能永远不返回，但是如果返回的话，就会比较迅速地返回。

1.1.5 通过时间的第二种计算方法：函数方程

我们可以利用定义(1.2)同样推出(1.6)。

对于非零整数 a 和 $s\in(-1,1)$，我们记 $u_a(s)=\mathbb{E}[s^{\zeta_a}]$。这样，如果 $a>0$，则因为首次到达 $a+1$ 之前，要先到达 a，然后从 a 出发，再首次到达右方邻位，我们有

$$
\begin{aligned}
u_{a+1}(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} s^m\mathbb{E}\Bigg[\underbrace{s^{\zeta_1\circ\Sigma^m},\zeta_a=m}_{\zeta_a=m\text{ 这个事件和 } s^{\zeta_1\circ\Sigma^m}\text{ 这个随机变量相互独立}}\Bigg]\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} s^m\mathbb{P}(\zeta_a=m)\mathbb{E}[s^{\zeta_1\circ\Sigma^m}]\\
&= \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} s^m\mathbb{P}(\zeta_a=m)}_{=u_a(s)}u_1(s) = u_a(s)u_1(s).
\end{aligned}
$$

对 $a<0$ 情况可以类似处理，最后得到对于所有 $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 和 $s\in(-1,1)$，

$$u_a(s)=u_{\mathrm{sgn}(a)}(s)^{|a|}.$$

（这里对所有非零实数，k，$\mathrm{sgn}(k)=k/|k|$。）接着，

$$\begin{aligned}u_1(s)&=\mathbb{E}[s^{\zeta_1},X_1=1]+\mathbb{E}[s^{\zeta_1},X_1=-1]\\&=ps+qs\mathbb{E}[\underbrace{s^{\zeta_2\circ\Sigma^1},X_1=-1}_{\text{把 }X_1\text{ 当作起点，要考虑首达右边 2 步处的时间}}]\\&=ps+qsu_2(s)=ps+qsu_1(s)^2.\end{aligned}$$

所以，

$$u_1(s)=\frac{1\pm\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}.$$

其中，$\pm$ 取 $-$ 的是正确的 $u_1(s)$，因为我们需要当 $s\in(-1,1)$ 时，总有 $u_1(s)<1$。（验证：$s\in(0,1)$ 时，$\frac{1+\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}>1$。）同理我们可以计算 $u_{-1}(s)$（练习）。最后的结果可以总结为：对 $a\neq0$ 和 $|s|<1$，

$$\mathbb{E}[s^{\zeta_a}]=\begin{cases}\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}\right)^a, & a>0,\\ \left(\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}\right)^{-a}, & a<0.\end{cases}$$

1.2 高维随机游动：常返性的引入

如果 $\mathbb{P}(\rho_0<\infty)=1$，我们称这个随机游动为常返的，否则称为瞬时的。如果一个随机游动是常返的，我们就可以把它看做多个从 0 到 0 的闭路径的叠加。和以为情况一样，随机游动只有在第偶数步才有可能走回 $\vec{0}$。

我们已经知道一维随机游动只有在对称情况下才是常返的。可以想见，高维随机游动也只能在对称情况下常返。下面我们要证明：对称的二维随机游动是常返的，但是三维或更高维情况却不是。

1.2.1 $\mathbb{Z}^d$ 上随机游动的定义

首先，我们考虑 $2d$ 个 d 维向量

$$\vec{v}_i=\begin{cases}(0,\ldots,\underbrace{1}_{\text{第 }i\text{ 个}},\ldots), & i=1,\ldots,d,\\ (0,\ldots,\underbrace{-1}_{\text{第 }i-d\text{ 个}},\ldots), & i=d+1,\ldots,2d,\end{cases}$$

以及 $2d$ 个非负实数 $p_1,\dots,p_{2d}$，且令 $p_1+\cdots+p_{2d}=1$。定义取值 $\mathbb{Z}^d$ 的相互独立的同分布的随机变量 $\vec{B}_1,\vec{B}_2,\dots$，使得 $\mathbb{P}(\vec{B}_i=\vec{v}_m)=p_m\ (m=1,\dots,2d)$。这样，$\mathbb{Z}^d$ 上的（最近邻）随机游动就是如下一族 $\mathbb{Z}^d$ 值随机变量 $\{\vec{X}_n: n\geq 0\}$

$$\vec{X}_0=\vec{0},\quad \vec{X}_n=\sum_{m=1}^{n}\vec{B}_m,\quad (n\geq 1),$$

或等价地，

$$\mathbb{P}(\vec{X}_0=\vec{0})=1,\quad \mathbb{P}(\vec{X}_n-\vec{X}_{n-1}=\vec{v}_m\mid \vec{X}_0,\vec{X}_1,\dots,\vec{X}_{n-1})=p_m.$$

如果 $p_1=\cdots=p_{2d}=1/(2d)$，则我们称这个随机游动为对称的。

我们定义随机变量 $\rho_{\vec{0}}=\inf\{n\geq 1:\vec{X}_n=0\}$ 为高维随机游动的首次返回时刻，并且称这个随机游动为常返的如果 $\mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}<\infty)=1$，或者瞬时的如果反之。

上面定义的随机游动是最简单最标准的，我们下面主要考虑它。但是，在高维情况，随机游动的定义可以更灵活些。比如：我们记 d 维向量 $\vec{u}=(u_1,\dots,u_d)$，这里 $u_i=\pm 1$。然后，对这样的 $\vec{\varepsilon}$，令 $N(\vec{u})=\sum_{m=1}^{d}(u_m+1)2^{d-2}$，也就是对于所有可能的 $\vec{u}$，$N(\cdot)$ 将其一一映射于 $\{0,1,\dots,2^d-1\}$。接着令 $q_0,q_1,\dots,q_{2^d-1}\in[0,1]$ 且 $\sum_{m=0}^{2^d-1}q_m=1$。定义取值 $\mathbb{Z}^d$ 的相互独立的同分布的随机变量 $B_1^d,B_2^d,\dots$，使得 $\mathbb{P}(B_i^d=\vec{u})=q_{N(\vec{u})}$。这样，$\mathbb{Z}^d$ 上的（最近邻）随机游动就是如下一族 $\mathbb{Z}^d$ 值随机变量 $\{\vec{Y}_n:n\geq 0\}$

$$\vec{Y}_0=\vec{0},\quad \vec{Y}_n=\sum_{m=1}^{n}B_m^d,\quad (n\geq 1),\tag{1.8}$$

或等价地，

$$\mathbb{P}(\vec{Y}_0=\vec{0})=1,\quad \mathbb{P}(\vec{Y}_n-\vec{Y}_{n-1}=\vec{u}\mid \vec{Y}_0,\vec{Y}_1,\dots,\vec{Y}_{n-1})=q_{N(\vec{\varepsilon})}.\tag{1.9}$$

如果对所有 ε 都有 $q_{N\vec{\varepsilon}}=2^{-d}$，则我们称这个随机游动为对称的。这个随机游动定义繁琐些，但是显然在 $d=1$ 时和上面的定义一致。其实，当 $d=2$ 时，这两个定义也是一致的，只是我们需要考虑不同的格点 $\mathbb{Z}^2$，见图1.3。随机游动 $\{\vec{Y}_n:n\geq 0\}$ 的第二个好处是：在对称情况下，它的 d 个坐标分量，等同于 d 个相互独立的 d 个一维对称随机游动。

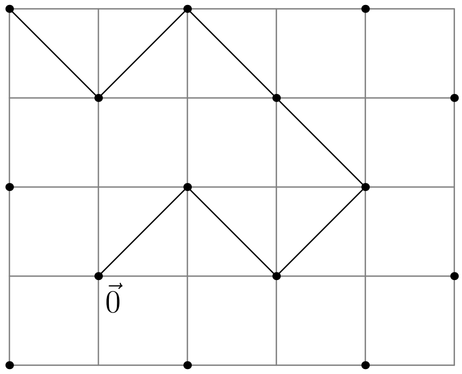

图 1.3: 二维随机游动 $\{\vec{X}_n\}$（在 · 格点阵上）等价于二维随机游动 $\{\vec{Y}_n\}$（在在纵横格子上）。

1.2.2 简单的常返条件

令 $\rho_{\vec{0}}^{(1)} = \rho_{\vec{0}}$，而且对于 $n > 1$，令随机变量

$$\rho_{\vec{0}}^{(n)} = \begin{cases} \infty, & \rho_{\vec{0}}^{(n-1)} = \infty, \\ \inf\{m > \rho_{\vec{0}}^{(n-1)} : \vec{X}_m = \vec{0}\}, & \rho_{\vec{0}}^{(n-1)} < \infty. \end{cases}$$

如果对于 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots \in \mathbb{Z}^d$，我们定义无穷个变元的函数

$$g(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots) = \inf\{n \geq 1 : \sum_{m=1}^{n} \vec{\varepsilon}_m = \vec{0}\},$$

则 $\rho_{\vec{0}}^{(1)} = \rho_{\vec{0}} = g(\vec{B}_1, \vec{B}_2, \ldots)$，而且，如果 $\rho_{\vec{0}}^{(n)} = m$，则 $\rho_{\vec{0}}^{(n+1)} = m + g(\vec{B}_{m+1}, \vec{B}_{m+2}, \ldots)$。注意到 $g(\vec{B}_{m+1}, \vec{B}_{m+2}, \ldots)$ 与 $g(\vec{B}_1, \vec{B}_2, \ldots)$ 同分布，且只差一个时间平移，所以我们也把它记作 $\rho_{\vec{0}} \circ \Sigma^m$。我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}^{(n+1)} < \infty) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}^{(n)} = m \& \rho_{\vec{0}} \circ \Sigma^m < \infty) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}^{(n)} = m) \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}} \circ \Sigma^m < \infty) \\ &= \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}^{(n)} < \infty) \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}} < \infty), \end{aligned}$$

这里我们用到了 $\rho_{\vec{0}} \circ \Sigma^m$ 这个随机变量与 $\rho_{\vec{0}}^{(n)} = m$ 这个事件相互独立。所以，对所有 $n \geq 1$，

$$\mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}^{(n)} < \infty) = \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}} < \infty)^n.$$

也就是说，如果 $\vec{0}$ 是常返的，则这个随机游动会回到 $\vec{0}$ 无数次。

定义随机游动在 $\vec{0}$ 的总停留时间

$$T_{\vec{0}} = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\vec{0}}(\vec{X}_n).$$

(这个随机变量很可能等于 ∞。)因为 $T_{\vec{0}} = n$ 意味着 $\rho_{\vec{0}}^{(n)} < \infty$ 而 $\rho_{\vec{0}}^{(n+1)} = \infty$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_{\vec{0}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{\vec{0}} > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}^{(n)} < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}} < \infty)^n \\ &= \frac{1}{1 - \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}} < \infty)} = \frac{1}{\mathbb{P}(\rho_{\vec{0}} = \infty)}.\end{aligned}$$

(如果 $\mathbb{P}(\rho_{\vec{0}} < \infty) = 0$，则几何级数收敛不成立，但是这时候显然其和为 $\infty = 1/0$。)

于是，我们有如下关系

$$\mathbb{P}(T_{\vec{0}} < \infty) > 0 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{至少有个 } n \text{ 使得 } \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}^{(n)} < \infty) < 1} \quad \mathbb{E}[T_{\vec{0}}] < \infty,$$

$$\mathbb{E}[T_{\vec{0}}] = \infty \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{对所有 } n\text{，} \mathbb{P}(\rho_{\vec{0}}^{(n)} < \infty) = 1} \quad \mathbb{P}(T_{\vec{0}} = \infty) = 1.$$

1.2.3 $\mathbb{Z}^2$ 上对称随机游动的常返性

虽然我们关心的是 $\{\vec{X}_n : n \geq 0\}$ 的常返/瞬时性，我们首先考虑 $\{\vec{Y}_n : n \geq 0\}$。我们证明，当 $d = 2$ 时，$\{\vec{Y}_n\}$ 是常返的，反之它是瞬时的。这样，因为 $d = 2$ 时这两种随机游动是等价的，我们得到 $\{\vec{X}_n\}$ 的常返性。对于 $\{\vec{Y}_n\}$，$\rho_{\vec{0}}$，$\rho_{\vec{0}}^{(n)}$，$T_{\vec{0}}$ 等随机变量可以等价定义，这里我们直接使用。

要证明常返性，我们只要证明 $\mathbb{E}[T_{\vec{0}}] = \infty$。因为

$$\mathbb{E}[T_{\vec{0}}] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\vec{0}}(\vec{Y}_n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} [1_{\vec{0}}(\vec{Y}_n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\vec{Y}_n = \vec{0}),$$

只要我们有 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\vec{Y}_n = \vec{0}) = \infty$，就得到此随机游动的常返性；反之，如果我们知道随机游动是瞬时的，则 $\mathbb{E}[T_{\vec{0}}] = \infty$，也就是 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\vec{Y}_n = \vec{0}) < \infty$。

由组合技术，我们知道，一维的对称随机游动在第 $2n$ 步走回 0，也就是 $X_n = 0$ 的概率是 $2^{-2n}\binom{2n}{n}$。对称的 d 维随机游动，可以视作在 d 个维度上各自独立的 d 个独立的一维随机游动。所以，$\vec{Y}_n = \vec{0}$，也就是 d 个一维

对称随机游动都返回 0 的概率，是 $2^{-2nd}\binom{2n}{n}^d$。我们需要计算（对于各个整数 d）

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2nd}\binom{2n}{n}^d$$

是否等于 ∞。

因为 $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$，我们可以用斯特林（Stirling）公式得到

$$\binom{2n}{n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(1 + \mathcal{O}(n^{-1})).$$

然后，我们知道求和

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2nd}\binom{2n}{n}^d$$

的收敛与否，取决于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^d$$

是否收敛。现在容易看出，当 $d = 1, 2$ 是，此级数发散，$d > 2$ 时，级数收敛。也就是说，$d = 1, 2$ 时，$\mathbb{E}[T_{\vec{0}}] = \infty$，于是 $\{\vec{Y}_n\}$ 是常返的，而 $d > 2$ 时，$\mathbb{E}[T_{\vec{0}}] < \infty$，于是 $\{\vec{Y}_n\}$ 是瞬时的。如果我们关心 $\{\vec{X}_n\}$，则当 $d = 1, 2$ 时，$\{\vec{X}_n\}$ 是常返的（其中 $d = 2$ 结论是新的），而 $d > 2$ 情况尚未知。

1.2.4 维数 $d \geq 3$ 时对称随机游动的瞬时性

既然我们已经知道 $\{\vec{Y}_n\}$ 的瞬时性，就试图把 $\{\vec{X}_n\}$ 和这个已经了解的随机游动联系起来。具体地说，我们试图在同一个概率空间，把 $\{\vec{X}_n\}$ 和 $\{\vec{Y}_n\}$ 同时放进去，并且用另一组随机变量把它们联系起来。这个技巧叫做耦合。

从 $\{\vec{X}_n\}$ 我们可以定义"计数"类型的随机变量 $\{N_{1,n}, \ldots, N_{d,n}\}$，使得

- $N_{1,0} = \cdots = N_{d,0} = 0$; 并且
- 对于 $n \in \mathbb{Z}_+$, 如果 X_n 和 X_{n-1} 的差别在第 k 个坐标上, 不论是增加 1 还是减小 1，则 $N_{k,n} = N_{k,n-1} + 1$，而对于其他的 $j \in \{1, \ldots, d\} \setminus \{k\}$，$N_{j,n} = N_{j,n-1}$。对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，存在唯一的 $k_n \in \{1, \ldots, d\}$ 使得 $N_{k_n,n} - N_{k_n,n-1} = 1$。

因为 $\{\vec{X}_n\}$ 是对称的，每个 k_n 都在 $\{1, \ldots, d\}$ 上均匀分布，且这些 $\{k_n\}$ 互相独立。很显然，当 $n \to \infty$ 时，以概率 1，对于所有 $k = 1, \ldots, d$，$N_{k,n}$ 趋近于 ∞。

接着，从 $\{\vec{X}_n\}$ 我们可以定义 $\{\vec{Y}_n\}$，或者等价地，d 个相互独立的一维随机变量序列 $\{Y_{1,n}\},\ldots,\{Y_{d,n}\}$，使得 $X_{k,n}=Y_{k,N_{k,n}}$。（以概率 1，所有的 $Y_{k,n}$ 都有定义）。因为 $\{\vec{X}_n\}$ 是对称的，不难看出，$\{\vec{Y}_n\}$ 与 $\{N_{k,n}\}$ 互相独立，而且 $\{\vec{Y}_n\}$ 是(1.8)和(1.9)定义的对称随机游动，或者等价地，$\{Y_{k,n}:n\geq 0\}$ 是各自相互独立的一维对称随机游动。

下面我们对充分大的 n 估计 $\mathbb{P}(\vec{X}_{2n}=\vec{0})$。我们证明一下几点：

1. $\mathbb{P}(\min_{k=1,\ldots,d}\{N_{k,2n}\}<n/d)=\mathcal{O}(n^{-d/2})$。

2. $\mathbb{P}(\vec{X}_{2n}=\vec{0}\&\min_{k=1,\ldots,d}\{N_{k,2n}\}\geq n/d)=\mathcal{O}(n^{-d/2})$.

有了这两个结论，我们便有（当 $d\geq 3$ 时）$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\vec{X}_{2n}=\vec{0})$ 收敛，得到所要的瞬时性结论。

要证明第1部分，我们只需要初等概率。因为 $N_{1,2n},\ldots,N_{d,2n}$ 各自同分布（但不一定相互独立），$\mathbb{P}(\min_{k=1,\ldots,d}\{N_{k,2n}\}<n/d)\leq d\mathbb{P}(\{N_{1,2n}\}<n/d)$。然后，$N_{1,2n}=1_{k_1=1}+1_{k_2=1}+\cdots+1_{k_{2n}=1}$，而每个 k_{2n} 都各自独立地有 $1/d$ 的概率等于 1，所以 $N_{1,2n}$ 服从二项式分布。具体计算可以得到想要的估计（其实比需要的估计还要强得多），这里略过。

要证明第2部分，我们利用 $\{N_{k,2n}\}$ 与 $\{Y_{k,m}:k=1,\ldots,d,m\geq 0\}$ 的独立性，以及 $\{Y_{1,n}\},\ldots,\{Y_{d,n}\}$ 这 d 个对称一维随机游动的相互独立性，有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\vec{X}_{2n}=\vec{0}\&\min_{k=1,\ldots,d}\{N_{k,2n}\}\geq\frac{n}{d}\right)\\
=&\sum_{m_1,\ldots,m_d=\lceil\frac{n}{d}\rceil}\mathbb{P}(N_{1,2n}=m_1,\ldots,N_{d,2n}=m_d,Y_{1,m_1}=0,\ldots,Y_{d,m_d}=0)\\
=&\sum_{m_1,\ldots,m_d=\lceil\frac{n}{d}\rceil}^{\infty}\mathbb{P}(N_{1,2n}=m_1,\ldots,N_{d,2n}=m_d)\mathbb{P}(Y_{1,m_1}=0)\cdots\mathbb{P}(Y_{d,m_d}=0)\\
\leq&\sum_{m_1,\ldots,m_d=\lceil\frac{n}{d}\rceil}^{\infty}\mathbb{P}(N_{1,2n}=m_1,\ldots,N_{d,2n}=m_d)\left(\max_{m=\lceil\frac{n}{d}\rceil}^{\infty}\mathbb{P}(Y_{1,m}=0)\right)^d\\
\leq&\left(\max_{m=\lceil\frac{n}{d}\rceil}^{\infty}\mathbb{P}(Y_{1,m}=0)\right)^d.
\end{aligned}
$$

显然如果令 m' 为最小的不小于 n/d 的偶数，则 $\max_{m=\lceil\frac{n}{d}\rceil}^{\infty}\mathbb{P}(Y_{1,m}=0)=\mathbb{P}(Y_{1,m'}=0)$。用类似第1.2.3节后半部分的计算可以得到我们想要的估计。